数理解析研究所講究録
49巻 1968年 34-40

Fourth Example of Type II_1 Factor

東北大 教養 斉藤 禎四郎

§1. 序. この講演では, WAI-MEE CHING の最近の論文, NON-ISOMORPHIC, NON-HYPERFINITE FACTORS の前半の部分を紹介する. 可分ヒルベルト空間上の II_1-型 von Neumann factor で(代数的に)同型でないものは, いままでに3つ知られている. 群 G の正則表現から構成される II_1-型 factor を, $A(G)$ であらわせば,

(1) $G=\Pi$, i.e. 自然数全体の上の有限置換全体の作る群のとき, $A(\Pi)$ は hyperfinite II_1-型 factor である.

(2) $G=\Phi_2$, i.e. 生成元が2つの自由群のとき, $A(\Phi_2)$ は non-hyperfinite II_1-型 factor で, 性質(Γ)を持たない.

(3) $G=\Pi\times\Phi_2$ のとき, $A(\Pi\times\Phi_2)$ は non-hyperfinite II_1-型 factor で, 性質(Γ)をもつ.

の3つが既知のものである. この論文では, von Neumann 代数の接合積を用いて, 上の(1), (2), (3) と同型でない第4番

目の non-hyperfinite II_1-型 factor を構成する．

§2．接合積．以下 R は可分ヒルベルト空間 H 上の von Neumann 代数で，ノルム 1 の巡回かつ分離ベクトル $x_0 \in H$ をもつとする．G を R の $*$-自己同型写像群で，$\|t^g x_0\| = \|t x_0\|$ がすべての $t \in R$ についてなりたつものとする．ただし，t^g は $g \in G$ による $t \in R$ の像である．このとき，G は H 上への忠実なユニタリ表現 $g \to u_g$ $(g \in G)$ をもち，

$$u_g t = t^g u_g \qquad (t \in R)$$

をみたす．いま，R, x_0 は上の如くとし，G を1つの群，G' を R の $*$-自己同型写像群で，$\|t^{g'} x_0\| = \|t x_0\|$ $(t \in R,\ g' \in G')$ をみたすものとし，φ を G から G' の上への準同型写像とする．G' は，上述の如きユニタリ表現 $g' \to u_{g'}$ を持つから，$g \in G$ に対して，$u_g = u_{g'}$，$t^g = t^{g'}$（ただし，$g' = \varphi(g) \in G'$）と定義する．$\mathcal{H} = \sum^{\oplus}_{g \in G} H_g$，$H_g = H_0$ $(g \in G)$ とするとき，G 上の R-値函数 $t : g \to t(g)$ がすべての $x = (x_g) \in \mathcal{H}$ について，

$$(L_t x)_g = \sum_{h \in G} t(h) u_h x_{gh}, \quad g \in G$$

が H において unconditionally convergent のとき，R-函数という．さらに G 上の R-函数 t に対して，

$$\sum_{g \in G} \|(L_t x)_g\|^2 \leqq K^2 \|x\|^2, \quad x = (x_g) \in \mathcal{H}$$

をみたす定数 K が存在するとき，$\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素 L_t，

$$L_t : x=(x_g)\in\mathcal{H} \longrightarrow ((L_t x)_g)\in\mathcal{H}$$

を R-shifter と呼ぶ．

定義．R-shifter 全体の集合を $R\otimes_\phi G$ とかき，R の (ϕ,G) による接合積と呼ぶ．

定理．$R\otimes_\phi G$ は von Neumann 代数であり，δ_e を $\delta_e(e)=1$，$\delta_e(g)=0$ $(g\neq e)$ とすれば，$x_0\otimes\delta_e\in\mathcal{H}$ は $R\otimes_\phi G$ の巡回かつ分離ベクトルである．

定理．$R\otimes_\phi G$ は次の(a)，(b)をみたせば factor である．

(a) G' は R の中心上エルゴード的．

(b) 各 $g\in G$, $g\neq e$ は次の(i)，(ii)，(iii)のいずれかをみたす．

(i) $\{h^{-1}gh : h\in G\}$ は G の無限部分集合（この条件をみたす群を ICC-群と呼ぶ）．

(ii) R が可換 von Neumann 代数で，$g'=\phi(g)$ は R 上 free

(iii) R が有限型又は III 型の factor で，$g'=\phi(g)$ が外部自己同型写像．

定理．$R\otimes_\phi G$ が factor のとき，

(i) $R\otimes_\phi G$ が有限型 $\Leftrightarrow$ R は G'-不変な有限トレースをもつ．

(ii) R が III 型 $\Rightarrow$ $R\otimes_\phi G$ も III 型．

次に第２の接合積　$R_2=(R\otimes_\psi G)\otimes_\psi\Delta$　を考える．R_2に属する作用素Tは$T=(t(g,\lambda))_{g\in G,\lambda\in\Delta}$　又は$(t(g,\lambda))$　とかくことにする．そのうちで特に，$t(g,\lambda)=0$ for $g\neq e$ なるものを$(t(e,\lambda))_{\lambda\in\Delta}$　とかく．このとき$\psi(\Delta)$が$\bar{R}$を$\bar{R}$に移す（$\bar{R}$はRの$H\otimes l^2(G)=\bar{H}$上への ampliation）ならば，

$$R_1=\{(t(e,\lambda))_{\lambda\in\Delta}\}$$

はR_2の von Neumann 部分代数で，次の補助定理が成立する．

補助定理．$\xi=x_0\otimes\delta_e\otimes\delta_e\in H\otimes l^2(G)\otimes l^2(\Delta)$　とおくとき，R_2上の正値線形汎函数　$f(S)=(S\xi,\xi)$　$(S\in R_2)$　が

$$f(ST)=f(TS),\quad S\in R_1,\ T\in R_2$$

をみたすとき，バナッハ空間R_2からバナッハ空間R_1へのノルム１の射影Pが存在して，任意の$T=(t(g,\lambda))\in R_2$に対して，

$$P(T)=(t(e,\lambda))\in R_1$$

をみたす．

§３．第４のFACTORの構成．Φを無限個の生成元の系$\Phi_0=\{a_0,b_0,a_1,b_1,\cdots\}$を持つ自由群とし，$\tau_i$は$a_i,b_i$だけを置換して他は動かさない$\Phi_0$上の置換，$\Delta$を$\tau_i$ $(i=1,2,\cdots)$の生成する群とする．各$\pi\in\Delta$は自然な仕方でΦの自己同型写像　$g\to g^\pi$　$(g\in\Phi)$　をみちびく．このとき，$A(\Phi)$の各

元 $(t(g))_{g\in\Phi}$ に対して，

$$(t(g))^{\pi} = (t(g^{\pi})) \qquad (\pi\in\Delta)$$

と定義すれば，Δ は $A(\Phi)$ の $*$-外部自己同型写像群となる．従って，$A(\Phi)\otimes\Delta$ は II_1-型 factor である．

定義．II_1-型 factor R が性質(Γ)を持つとは，任意有限個の $T_1, T_2, \dots, T_n \in R$ と任意の正数 $\varepsilon>0$ に対して，ユニタリ作用素 $U\in R$ が存在して，

$$tr(U)=0, \quad [[U^{*}T_kU - T_k]] < \varepsilon \quad (k=1,2,\dots,n)$$

をみたすときである．

定義．von Neumann代数 R が性質(C)をもつとは，各 $T\in R$ に対して $\text{strong}\lim\limits_{n} U_n^{*}TU_n = T$ をみたすユニタリ作用素の列 $\{U_n\}$ $(U_n\in R)$ があたえられたときに，お互に可換な作用素の列 $\{V_n\}$ $(V_n\in R)$ が存在して，$\text{strong}\lim\limits_{n}(U_n-V_n)=0$ となるときである．

このとき，次の諸定理が証明できて，$A(\Phi)\otimes\Delta$ は §1 でのべた既知の II_1-型 factors $A(\Pi)$, $A(\Phi_2)$, $A(\Pi\times\Phi_2)$ と同型でない第4の II_1-型 factor である．

定理．$A(\Phi)\otimes\Delta$ は性質(Γ)をもつ．

証明．$T_1, T_2, \dots, T_n \in A(\Phi)\otimes\Delta$ と正数 $\varepsilon>0$ があたえられているとする．$T_1', T_2', \dots, T_n' \in A(\Phi)\otimes\Delta$ を台が $\Phi\times\Delta$ の有限部分集合 $S\times S'$ となるもので，

$$[[T_k - T_k']] < \varepsilon/2 \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

をみたすものとする．S' は Φ の有限部分集合であるから，S' の要素にあらわれる Φ の要素 a_i 又は b_j のうちで番号 j の最大のものを q とすると，Δ が可換群なることに注意すれば，$U = \tilde{u}_{\eta_{q+1}} \in A(\Phi)\otimes\Delta$ は $UT_k' = T_k'U$ $(k=1,2,\cdots,n)$ をみたし，$tr(U) = (U\delta_e\otimes\delta_e, \delta_e\otimes\delta_e) = 0$ である．

$$\therefore\ [[U^*T_kU - T_k]] \leqq [[U^*(T_k - T_k')U]] + [[T_k' - T_k]]$$
$$< \varepsilon \quad (k=1,2,\cdots,n).$$

定理．$A(\Phi)\otimes\Delta$ は性質（C）をもつ．

証明．$\{U_n\}$ $(U_n \in A(\Phi)\otimes\Delta)$ をユニタリ作用素の列で

$$\underset{n}{\text{strong lim}}\ U_n^*TU_n = T, \quad T \in A(\Phi)\otimes\Delta$$

をみたすものとする．$A(\Phi)\otimes\Delta = (R\otimes_\phi\Phi)\otimes\Delta$（ただし R は複素数体，ϕ は $\Phi \to \{e\}$ の準同型対応）に補助定理を用いれば，$A(\Phi)\otimes\Delta$ から部分代数 $R_1 = \{(x(e,\lambda))_{\lambda\in\Delta}\}$ の上へのノルム 1 の射影 P が存在する．$V_n = P(U_n)$ とおけば Δ が可換群なることから $\{V_n\}$ はお互に可換で，$\underset{n}{\text{strong lim}}\,(U_n - V_n) = 0$ をみたす．

定理．$A(\Pi)$, $A(\Pi\times\Phi_2)$ は性質（C）をもたない．

証明．$g_i \in \Pi$ を i と $i+1$ を置換し他は動かさない元とすると，$U_n = \tilde{u}_{g_n}$ $(n=1,2,\cdots)$ は

$$\underset{n}{\text{strong lim}}\ U_n^*TU_n = T, \quad T \in A(\Pi)$$

をみたす．いま $A(\Pi)$ が性質 (C) を持つとすると，お互に可換な作用素の列 $\{V_n\}$ $(V_n \in A(\Pi))$ が存在して $\mathrm{stronglim}(U_n - V_n) = 0$ をみたす．所が一方 $g_i g_{i+1} \neq g_{i+1} g_i$ $(i=1,2,\cdots)$ であるから

$$\sqrt{2} = \| \delta_{(g_i g_{i+1})^{-1}} - \delta_{(g_{i+1} g_i)^{-1}} \| = \| (U_i U_{i+1} - U_{i+1} U_i)\delta_e \|$$

$$= [[U_i U_{i+1} - U_{i+1} U_i]]$$

$$\leqq [[(U_i - V_i) U_{i+1}]] + [[V_i (U_{i+1} - V_{i+1})]] + [[(V_{i+1} - U_{i+1}) V_i]]$$

$$+ [[U_{i+1} (V_i - U_i)]] \leqq 2 [[U_i - V_i]] + 2 \| V_i \| [[U_{i+1} - V_{i+1}]]$$

$$\to 0 \quad (i \to \infty).$$

これは矛盾．